Neemias Martins
neemias.org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Funções de várias variáveis

Exercício 1. Determine e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$
(b) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
(c) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

Solução: (a)

$\sqrt{x+y}$ está definido somente se

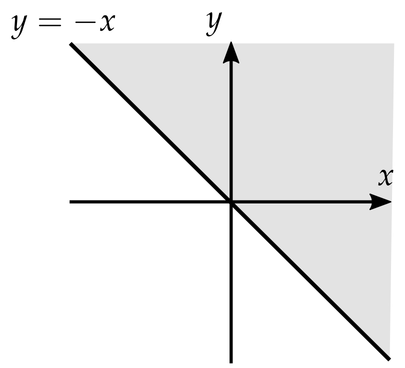
$$x + y \geq 0,$$

i.e

$$y \geq -x.$$

Então

$$\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \geq -x\}.$$



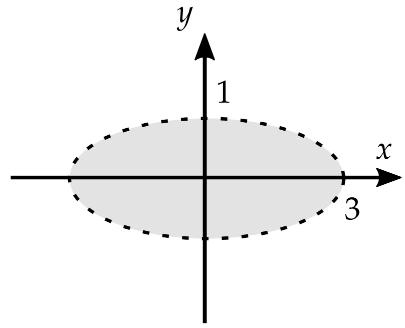
(b)

$\ln(9 - x^2 - 9y^2)$ está definida somente quando $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} & 9 - x^2 - 9y^2 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 - 9y^2 > -9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 9y^2 < 9 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{9} + y^2 < 1. \end{aligned}$$

O domínio é o interior de uma elipse:

$$\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, \frac{x^2}{9} + y^2 < 1\}.$$

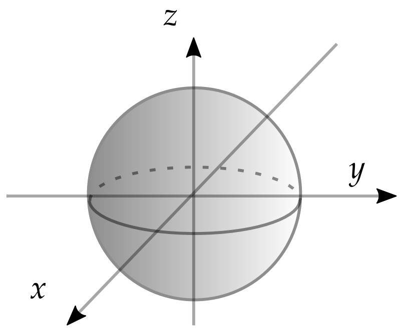


(c)

$\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ é bem definida somente se $1-x^2-y^2-z^2 \geq 0$, ou seja, $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Portanto o domínio de f é a esfera de raio 1 com centro na origem e todo o seu interior:

$$\text{dom}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$



EXERCÍCIO 2. Esboce o gráfico da função $f(x,y) = 9 - x^2 - 9y^2$.

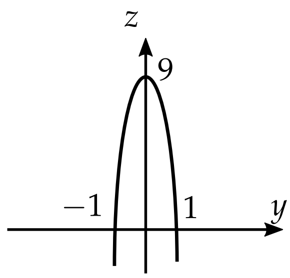
SOLUÇÃO:

$$\text{gr}(f) = \{(x,y,z)|\,(x,y) \in \text{dom}(f) \text{ e } z = f(x,y)\}.$$

Analisamos inicialmente as intersecções de $\text{gr}(f)$ com os planos $x=0$, $y=0$ e $z=0$.

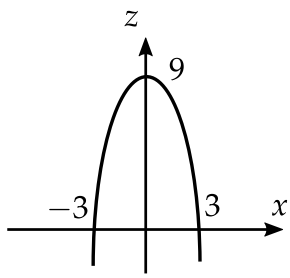
Traço-yz:

$$x = 0 \Rightarrow z = 9 - 9y^2.$$



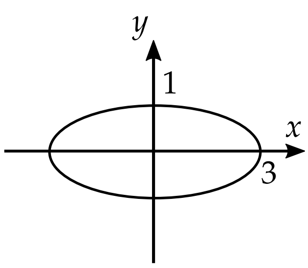
Traço-xz:

$$y = 0 \Rightarrow z = 9 - x^2.$$

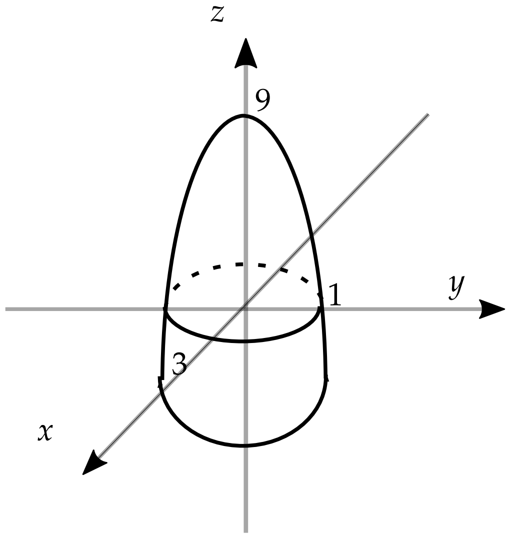


Traço-xy:

$$z = 0 \Rightarrow 9 - x^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$



O gráfico de f é um paraboloide elíptico. Esboço do gráfico:



EXERCÍCIO 3. Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

(a) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$.

(b) $f(x,y) = (y-2x)^2$ não foi feito em sala

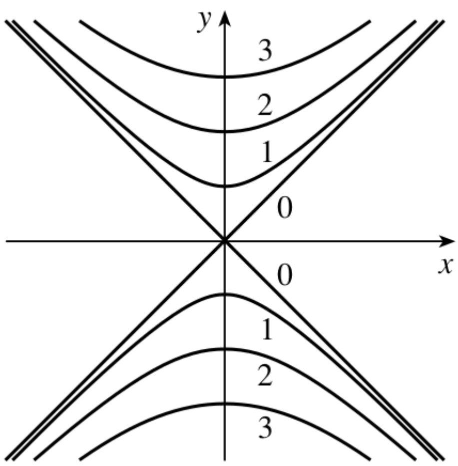
SOLUÇÃO: (a)

Fazemos $\sqrt{y^2 - x^2} = k$, logo $y^2 - x^2 = k^2$, ou seja

$$\text{Se } k = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$$

$$\text{Se } k \neq 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = k^2 \Rightarrow \frac{-x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1.$$

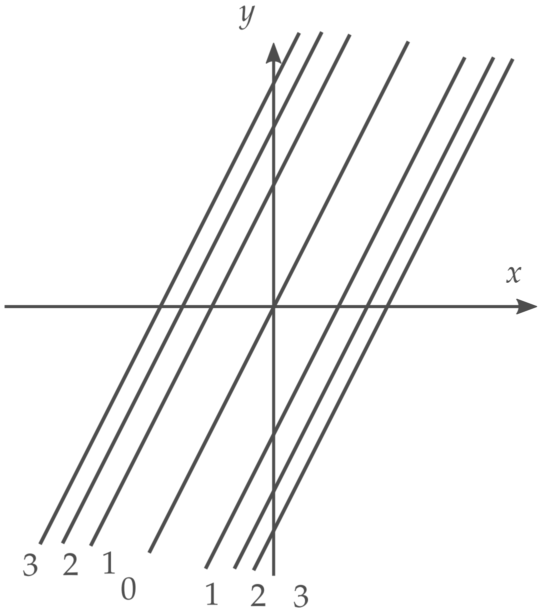
Se $k = 1$, temos $-x^2 + y^2 = 1$. Se $k = 2$, temos $\dfrac{-x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Se $k = 4$, então $\dfrac{-x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.



(b) As curvas de nível são da forma $(y-2x)^2 = k$.

$$(y-2x)^2 = k$$
$$\Rightarrow y - 2x = \pm\sqrt{k}$$
$$\Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{k}.$$

Se $k=0$, então $y=2x$. Se $k=1$, então $y=2x+1$ ou $y=2x-1$. Se $k=4$, então $y=2x+2$ ou $y=2x-2$. Se $k=25$, então $y=2x+5$ ou $y=2x-5$.



Limites e Continuidade

Exercício 4. Determine o limite, se existir ou mostre que não existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4+4y^2}$$

Solução:

Note que sobre o eixo x, i.e. fazendo $y=0$ temos $f(x,0)=0$. Assim $f(x,y)\to 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo do eixo x.

Agora, sobre a curva $y=x^2$, temos $f(x,x^2)=\dfrac{x^4e^{x^2}}{5x^4}$. Então $f(x,y)\to\frac{1}{5}$ quando $(x,y)\to(0,0)$ sobre a curva $y=x^2$, pois

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4e^{x^2}}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{5}=\frac{1}{5}.$$

Como os limites de f ao aproximarmos de $(0,0)$ pelas curvas $y=0$ e $y=x^2$ são distintos, segue que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exercício 5. Determine o maior conjunto em que a função é contínua:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solução:

Quando $(x,y)\neq(0,0)$, f é uma função racional e portanto contínua. Vejamos se f é contínua em $(x,y)=(0,0)$.

Note que $0 \leq x^2 \leq 2x^2 \leq 2x^2 + y^2$. Logo,

$$x^2 \leq 2x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{2x^2+y^2} \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \left|\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}\right| \leq |y^3|.$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y^3| = 0$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} = 0.$$

Uma vez que $f(0,0) = 1$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} = 0$, segue que f não é contínua em $(0,0)$. Portanto o maior conjunto de continuidade de f é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, isto é $\{(x,y) | (x,y) \neq (0,0)\}$.

EXERCÍCIO 6. Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

SOLUÇÃO 1:
Usaremos coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\theta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Quando $(x,y) \to (0,0)$, temos $r \to \sqrt{0^2+0^2} = 0$. Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to0} \frac{r^2\cos\theta\,\text{sen}\theta}{r} = \lim_{r\to0} r\cos\theta\,\text{sen}\theta$$

Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ e $-1 \leq \text{sen}\theta \leq 1$, então $-1 \leq \cos\theta\,\text{sen}\theta \leq 1$, daí

$$-r \leq r\cos\theta\,\text{sen}\theta \leq r.$$

Como $\lim_{r\to0} -r = \lim_{r\to0} r = 0$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to0} r\cos\theta\,\text{sen}\theta = 0.$$

SOLUÇÃO 2:
É suficiente mostrarmos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0$$

ou seja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Note que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Então

$$0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y|.$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

SOLUÇÃO 3: Seja $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Rascunho: Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, queremos encontrar um $\delta > 0$ tal que se $(x,y) \neq (0,0)$ com

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \text{ i.e. } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$

então

$$|f(x,y) - 0| < \varepsilon \text{ i.e. } \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \varepsilon.$$

Note que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Então

$$0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |y|.$$

Como $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, então escolhendo $\delta = \varepsilon$, obtemos

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |y| < \delta = \varepsilon.$$

Resposta: Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$. Suponha que $(x,y) \neq (0,0)$ e $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$. Então, como $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, e $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, temos

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \varepsilon.$$