Neemias Martins
neemias. org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Teorema de Stokes

Exercício 1

Use o Teorema de Stokes para calcular

$$\int\int_S \text{rot}(F)\cdot d\vec{S},$$

para $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ e S sendo a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, com orientação para cima.

Solução: Interseção do parabolóide com o plano:

$$\begin{aligned} &5 = 9 - x^2 - y^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = 4, \quad z = 5. \end{aligned}$$

Esta é a curva C que delimitada a superfície S e é orientada no sentido anti-horário. Sua parametrização é dada por:

$$r(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 5); \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Então

$$\begin{aligned} r'(t) &= (-2\sin(t), 2\cos(t), 0) \\ F(r(t)) &= (10\sin(t), 10\cos(t), 4\cos(t)\sin(t)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \int\int_S \text{rot}(F)\cdot d\vec{S} &= \int_C F\cdot dr \\ &= \int_0^{2\pi} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (10\sin(t), 10\cos(t), 4\cos(t)\sin(t))\cdot(-2\sin(t), 2\cos(t), 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 20\big(-\sin^2(t) + \cos^2(t)\big)\,dt \\ &= 20\int_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt \\ &= 20\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Exercício 2

Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha

$$\oint_C zdx - 2xdy + 3ydz,$$

em que C é a curva dada pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

Solução:
Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\int_C F \cdot dr = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int\int_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S},$$

sendo $F = (P, Q, R)$ e C a fronteira da superfície S.
Temos $F(x, y, z) = (z, -2x, 3y)$ e

$$\text{rot }(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (3, 1, -2).$$

A superfície S é parametrizada por

$$r(u, v) = (u, v, 1 - u - v), (u, v) \in D$$

sendo $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Logo,

$$\begin{aligned} r_u &= (1, 0, -1) \\ r_v &= (0, 1, -v) \\ r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1) \\ \text{rot } F(r(u, v)) &= (3, 1, -2) \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C zdx - 2xdy + 3ydz &= \int\int_S \text{rot}(F) \cdot dS \\ &= \int\int_D \text{rot } F(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v)\, dA \\ &= \int\int_D (3, 1, -2) \cdot (1, 1, 1)\, dA \\ &= 2\int\int_D dA \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\, drd\theta \\ &= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi. \end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter calculado usando o vetor normal:

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}.$$

Daí, pelo Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\oint_C z dx - 2x dy + 3y dz &= \int\int_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S} \\
&= \int\int_S \text{rot}\, F \cdot n \, dS \\
&= \int\int_S (3,1,-2) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \, dS \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int\int_S 1 \cdot dS \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int\int_D |r_u \times r_v| \;\, dA \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int\int_D \sqrt{3} \, dA = 2\pi.
\end{aligned}$$

Exercício 3

Sejam $F(x,y,z) = (x+y+z^2)\vec{k}$ e S a fronteira do cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$. Calcule

$$\int\int_S F \cdot n \, dS,$$

em que n é o vetor normal unitário que aponta para fora do cilindro.

Solução:
Temos

$$\int\int_S F \cdot n \, dS = \int\int_S F \cdot d\vec{S}.$$

Pelo Teorema do Divergente (ou Teorema de Gauss), segue que

$$\int\int_S F \cdot d\vec{S} = \int\int\int_E \operatorname{div}(F) \, dV,$$

sendo E o sólido dado pelo cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ e $0 < z < 3$.
Como $F(x,y,z) = (0,0,x+y+z^2)$, então $\operatorname{div}(F) = 2z$. Portanto,

$$\int\int_S F \cdot d\vec{S} = \int\int\int_E 2z \, dV.$$

Usaremos coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int\int_S F \cdot d\vec{S} &= \int\int\int_E 2z \, dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 2z \cdot r \, dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[z^2\right]_0^3 \cdot r \, dr d\theta \\
&= 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 \cdot 9 = 36\pi.
\end{aligned}$$

Exercício 4

Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície
$$\int\int_S F \cdot d\vec{S},$$
ou seja, calcule o fluxo de F através de S, sendo
$$F(x, y, z) = \left(x^3 + y\sin(z), y^3 + z\sin(x), 3z\right)$$
e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
e pelo plano $z = 0$.

Solução:

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3 = 3\left(x^2 + y^2 + 1\right).$$

Considere S orientada positivamente e seja E o sólido delimitado por S. Pelo Teorema do divergente, e usando coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\varphi, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int\int_S F \cdot d\vec{S} &= \int\int\int_E \operatorname{div}(F)\, dV \\
&= 3\int\int\int_E \left(x^2 + y^2 + 1\right) dV \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \left(\rho^2\sin^2(\varphi)\cos^2\theta + \rho^2\sin^2(\varphi)\sin^2\theta + 1\right) \cdot \rho^2\sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \left(\rho^2\sin^2(\varphi) + 1\right) \cdot \rho^2\sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \left(\rho^4\sin^3(\varphi) + \rho^2\sin\varphi\right) d\rho d\varphi d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\varphi)\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 + \sin\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 d\varphi d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\varphi)\left[\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}\right] + \sin\varphi\left[\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\right] d\varphi d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2(\varphi)\right) \cdot \sin\varphi \cdot \frac{31}{5} + \frac{7}{3}\sin\varphi\, d\varphi d\theta \\
&= 2\pi \cdot \left[\frac{93}{5}\left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3(\varphi)}{3}\right) - 7\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{194}{5}\pi.
\end{aligned}$$

Exercício 5

Sejam $F(x,y,z) = \left(x, y, x^2 + y^2\right)$ e C a fronteira da parte do parabolóide

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

no 1º octante. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$, sendo C orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

SOLUÇÃO:

S é a superfície dada por $z = g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ no 1º octante. Uma parametrização dela é dada por

$$r(u,v) = \left(u, v, 1 - u^2 - v^2\right); \quad u \geq 0,\ v \geq 0$$

Daí,

$$\begin{aligned} r_u &= (1, 0, -2u) \\ r_v &= (0, 1, -2v) \\ r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1). \end{aligned}$$

Ainda,

$$\text{rot}\,(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y, -2x, 0)$$

Logo,

$$\text{rot}\, F(r(u,v)) = (2v, -2u, 0).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr &= \int\int_S \text{rot}(F) d\vec{S} \\ &= \int\int_D \text{rot}\, F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v)\, dA \\ &= \int\int_D (2v, -2u, 0) \cdot (2u, 2v, 1)\, dA \\ &= \int\int_D 2uv - 2uv\, dA = 0. \end{aligned}$$

Exercício 6

Calcule $\int\int_S F \cdot d\vec{S}$ em que $F(x,y,z) = \left(3xy^2, xe^z, z^3\right)$ e S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e os planos $x = -1$ e $x = 2$.

SOLUÇÃO:
Seja E o sólido dado pelo cilindro e os planos do enunciado. Temos

$$\text{div}(F) = \nabla \cdot F = 3y^2 + 0 + 3z^2 = 3\left(y^2 + z^2\right).$$

Usaremos coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= r\cos\theta \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

(Note que o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ se estende ao longo do eixo x!).

Pelo Teorema do Divergente:

$$\begin{aligned} \int\int_S F \cdot d\vec{S} &= \int\int\int_E \text{div}(F)\, dV \\ &= \int\int\int_E 3\left(y^2 + z^2\right) dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^2 3 \cdot r^2 \cdot r\, dxdrd\theta \\ &= 3 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot [x]_{-1}^2 \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \\ &= \frac{18}{4}\pi. \end{aligned}$$