Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Neemias Martins
neemias. org/ped
neemias@ime.unicamp.br

(Alguns) Exercícios de Revisão

Exercício 1

Considere a função $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$ definida em $\mathbb{R}^2$.
a) Determine os pontos críticos e seus valores críticos.
b) Classifique os pontos críticos como máximos/mínimos locais ou pontos de sela.

Solução:
a) Temos

$$f_x = 3x^2y + 24x \ \text{ e } f_y = x^3 - 8.$$

Para encontrar os pontos críticos, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} 3x^2y + 24x &= 0 \\ x^3 - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Da segunda equação, $x^3 = 8$, ou seja $x = 2$. Substituindo tal resultado na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 2^2y + 24 \cdot 2 = 0 \\ & \Rightarrow 12y + 48 = 0 \\ & \Rightarrow y = -\frac{48}{12} \\ & \Rightarrow y = -4. \end{aligned}$$

O único ponto crítico é $(2, -4)$. Seu valor crítico é dado por

$$f(2, -4) = 2^3(-4) + 12 \cdot 2^2 - 8(-4) = 48.$$

b) Usaremos o Teste da 2ª derivada.

$$\begin{aligned} & f_{xx} = 6xy + 24, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 3x^2 \\ & \Rightarrow D(x,y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (6xy + 24) \cdot 0 - \left(3x^2\right)^2 = -9x^4 \\ & \Rightarrow D(2, -4) = -9 \cdot 2^4 = -144 < 0. \end{aligned}$$

Como $D(2, -4) < 0$, segue que $(2, -4)$ é um ponto de sela.

Exercício 2

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determine os pontos do elipsóide
$$x^2 + y^2 + z^2 = 35$$
que são candidatos a máximos e mínimos da soma
$$2x + 6y + 10z$$
e indique quais são os máximos ou mínimos globais.

SOLUÇÃO:
Queremos maximizar/minimizar a função

$$f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$$

sujeitando-a à condição

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 35.$$

- Primeiro Passo: 35 é um valor regular para a função g. Pois

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0)$$

  se e somente se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Mas nesse caso teríamos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 \neq 35.$$

- Segundo Passo: Usando os multiplicadores de Lagrange, temos

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z) \ \text{ e } g(x, y, z) = 35$$

ou seja, devemos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} &2 = \lambda \cdot 2x \\ &6 = \lambda \cdot 2y \\ &10 = \lambda \cdot 2z \\ &x^2 + y^2 + z^2 = 35. \end{aligned}$$

Das três primeiras equações:

$$x = \frac{1}{\lambda}, \; y = \frac{3}{\lambda}, \; z = \frac{5}{\lambda}.$$

Substituindo na última:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = 35 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{5}{\lambda}\right)^2 = 35 \\ &\Rightarrow \frac{35}{\lambda^2} = 35 \\ &\Rightarrow \lambda = \pm 1. \end{aligned}$$

Então os candidatos a extremos são os pontos $(1, 3, 5)$ e $(-1, -3, -5)$.

- Terceiro Passo: Note que f é uma função contínua em todo o seu domínio e o elipsóide

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = 35\}$$

é um conjunto compacto (limitado e fechado), portanto pelo Teorema do Valor Extremo, f admite máximo e mínimo globais no elipsóide. Portanto seu valor máximo global é $f(1, 3, 5) = 70$ e o mínimo global é $f(-1, -3, -5) = -70$.

Exercício 3

Calcule

$$\int\int_D x \cdot \cos(y)\, dA$$

e determine a área da região D limitada por $y = 0, y = x^2, x = 1$.

Solução:

$$D = \{(x, y) |\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}.$$

A área de D é dada por

$$A(D) = \int\int_D 1 \cdot dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} 1 \cdot dydx = \int_0^1 [y]_0^{x^2}\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int\int_D x \cdot \cos(y)\, dA &= \int_0^1 \int_0^{x^2} x \cdot \cos(y)\, dydx \\
&= \int_0^1 x \cdot [\sin(y)]_0^{x^2}\, dx \\
&= \int_0^1 x \cdot \sin(x^2)\, dx \text{ (Substitua } u = x^2\text{)} \\
&= -\frac{1}{2}\left[\cos(x^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos(1)).
\end{aligned}$$

Exercício 4

Calcule

$$\int\int_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$$

em que R é a região limitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$. Use a transformação

$$x = \sqrt{2} \cdot u - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v, \quad y = \sqrt{2} \cdot u + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v.$$

Solução:
O jacobiano da transformação é dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{3}} > 0.$$

Usando a transformação, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= \left(\sqrt{2} \cdot u - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v\right)^2 - \left(\sqrt{2} \cdot u - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot u + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v\right) + \left(\sqrt{2} \cdot u + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v\right)^2 \\ &= 2u^2 + 2v^2. \end{aligned}$$

E a região $x^2 - xy + y^2 \leq 2$ é então levada pela transformação na região $2u^2 + 2v^2 \leq 2$, ou seja $u^2 + v^2 \leq 1$.
Portanto, pelo Teorema de Mudança de Variáveis:

$$\begin{aligned} \int\int_R (x^2 - xy + y^2)\, dA &= \int\int_{u^2+v^2 \leq 1} (2u^2 + 2v^2) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}\, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 \cdot r^2) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot r\, drd\theta \quad \text{(coordenadas polares)} \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\, drd\theta \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exercício 5

Usando o Teorema de Stokes, calcule $\int_C F \cdot dr$ em que $F(x,y,z) = \left(x^2z, xy^2, z^2\right)$ e C é a curva de interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

Solução 1:
Vamos considerar uma superfície S tal que $\partial S = C$. Seja S parametrizada por

$$r(u,v) = (u, v, 1 - u - v) \ \text{ com } u^2 + v^2 \leq 9.$$

(Ou seja, S é a parte do plano limitada pelo cilindro).
O vetor normal unitário à superfície é dado por

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

pois $r_u = (1,0,-1)$, $r_v = (0,1,-1)$ $\quad$ e $\quad r_u \times r_v = (1,1,1)$.
Agora,

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & xy^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k} = \left(0, x^2, y^2\right).$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= \int\int_S \text{rot F} \cdot dS \\
&= \int\int_S \text{rot } F \cdot n \, dS \\
&= \int\int_S \left(0, x^2, y^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \, dS \\
&= \int\int_S \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^2 + y^2\right) dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int\int_D \left(u^2 + v^2\right) \cdot |r_u \times r_v| \ dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int\int_{u^2+v^2 \leq 9} \left(u^2 + v^2\right) \cdot \sqrt{3} \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \cdot r \, dr d\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{81}{4} \\
&= \frac{81\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Solução 2: Considerando a mesma parametrização,

$$r(u,v) = (u,v,1-u-v) \ \text{ com } u^2+v^2 \leq 9,$$

temos

$$r_u \times r_v = (1,1,1) \quad \text{ e } \quad \text{rot}\, F(r(u,v)) = \left(0,u^2,v^2\right)$$

e então pelo Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= \int\int_S \text{rot F} \cdot dS \\
&= \int\int_D \text{rot}\, F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v)\, dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2\leq 9} \left(0,u^2,v^2\right) \cdot (1,1,1)\, dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2\leq 9} u^2+v^2\, dA \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\, drd\theta \\
&= \frac{81\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercício 6

Use o Teorema do Divergente para calcular

$$\int\int_S (2x + 2y + z^2)\ ds$$

em que S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução: Inicialmente, devemos encontrar um campo F tal que

$$\int\int_S F \cdot n\ dS = \int\int_S (2x + 2y + z^2)\ dS.$$

Devemos ter então

$$F \cdot n = 2x + 2y + z^2.$$

Como S é uma esfera unitária, os vetores normais à S são da forma

$$n = \frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x,y,z).$$

Daí,

$$F \cdot n = 2x + 2y + z^2 \Rightarrow F(x,y,z) = (2,2,z).$$

Portanto $\text{div}F = \nabla \cdot F = 0 + 0 + 1 = 1$ e então pelo Teorema do Divergente:

$$\begin{aligned}
\int\int_S (2x + 2y + z^2)\ ds = \int\int_S F \cdot n\ dS &= \int\int\int_E \text{div}F\ dV \quad (\star)\\
&= \int\int\int_E 1\ dV\\
&= V(E) = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

$(\star)$ Para resolver esta integral, use coordenadas esféricas

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \cdot \sin(\varphi)\ d\varphi d\theta d\rho,$$

ou lembre da fórmula do volume da esfera.