

Aula de Exercícios

📌 Cálculo II - MA211

DERIVADAS PARCIAIS

EXERCÍCIO 1. Seja $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$. Calcule $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações.

SOLUÇÃO:

$$f_x(x, y) = -8x \Rightarrow f_x(1, 2) = -8.$$

$$f_y(x, y) = -2y \Rightarrow f_y(1, 2) = -4.$$

O gráfico de f é o parabolóide $z = 16 - 4x^2 - y^2$. A interseção do plano $y = 2$ e $\text{gr}(f)$ é dado pela parábola $z = 12 - 4x^2, x = 2$:

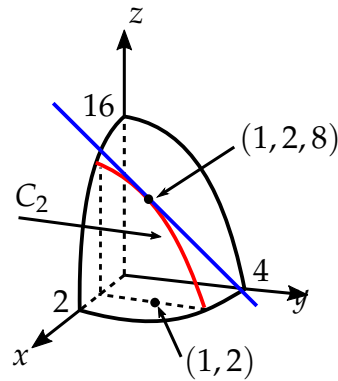
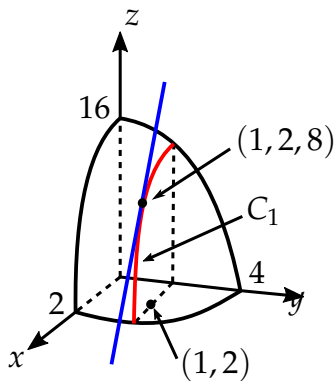
$$C_1(x) = (x, 2, 12 - 4x^2), x \in \mathbb{R}.$$

A inclinação da reta tangente à curva C_1 no ponto $(1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, 8)$ é $f_x(1, 2) = -8$.

Analogamente, a interseção do plano $x = 1$ e $\text{gr}(f)$ é dado pela parábola $z = 12 - y^2, x = 1$:

$$C_2(y) = (1, y, 12 - y^2), y \in \mathbb{R}.$$

A inclinação da reta tangente à curva C_2 no ponto $(1, 2, 8)$ é $f_y(1, 2) = -4$.



EXERCÍCIO 2. Determine as derivadas parciais de 1ª ordem das funções:

a) $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$

b) $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$

SOLUÇÃO: (a)

$$f_x(x, y, z) = \frac{1}{x + 2y + 3z}, f_y(x, y, z) = \frac{2}{x + 2y + 3z}, f_z(x, y, z) = \frac{3}{x + 2y + 3z}.$$

b)

📌 O Teorema Fundamental do cálculo diz que se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então a função $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivável e $g'(x) = f(x)$, ou seja,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Como $f(t) = \cos(e^t)$ é contínua, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$F_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_y^x \cos(e^t) dt = \cos(e^x).$$

$$F_y(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \int_x^y \cos(e^t) dt = -\cos(e^y).$$

EXERCÍCIO 3. Verifique se $u(t, x) = e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen}(kx)$ é solução da equação do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

SOLUÇÃO:

$$u_x = ke^{-\alpha^2 k^2 t} \cos(kx)$$

$$u_{xx} = -k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen}(kx)$$

$$u_t = -\alpha^2 k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen}(kx) = \alpha^2 u_{xx}.$$

PLANOS TANGENTES E APROXIMAÇÕES LINEARES

EXERCÍCIO 4. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right); & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Determine $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.
- b) Mostre que $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ não são contínuas em $(0, 0)$.
- c) Prove que f é diferenciável em $(0, 0)$.

SOLUÇÃO:(a) Se $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f_x(x, y) = 2x \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= 2x \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

$$f_y(x, y) = 2y \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

Se $(x, y) = (0, 0)$,

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0.$$

Na última igualdade, usamos o fato de que $\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)$ é limitado:

$$-1 \leq -\left|\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)\right| \leq \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) \leq \left|\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)\right| \leq 1.$$

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

Note que sobre a reta $y = x$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_x(x,x) &= \lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2x^2} \right) - \frac{x}{x^2} \cos \left(\frac{1}{2x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} \cos \left(\frac{1}{2x^2} \right) \text{ não existe!} \end{aligned}$$

pois $\lim_{x \rightarrow +0} -\frac{1}{x} \cos \left(\frac{1}{2x^2} \right) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -0} -\frac{1}{x} \cos \left(\frac{1}{2x^2} \right) = \infty$. Como não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x,x)$, não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y)$ e então f_x não é contínua em $(0,0)$. Analogamente, f_y não é contínua em $(0,0)$.

c)

$$f \text{ é diferenciável em } (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } (0,0) \\ \text{e } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} &= \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{(h^2 + k^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h^2 + k^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{(h^2 + k^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h^2 + k^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h^2 + k^2} \right). \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h^2 + k^2} \right) = 0,$$

segue que f é diferenciável em $(0,0)$.

EXERCÍCIO 5. Existe alguma função f tal que suas derivadas parciais sejam dadas por $f_x(x,y) = x + 4y$ e $f_y(x,y) = 3x - y$?

SOLUÇÃO: Temos $f_{xy}(x,y) = 4$ e $f_{yx} = 3$. Note que f_{xy} e f_{yx} são funções constantes, logo são contínuas, mas $f_{xy} \neq f_{yx}$. Portanto, pelo Teorema de Clairaut-Schwarz não existe f .

EXERCÍCIO 6. Determine N_p e uma equação do plano tangente à superfície $z = \sqrt{xy}$ em $p = (1,1,1)$.

■ Em geral, a equação de $T_p S$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Essa equação também pode ser determinada na forma

$$N_p \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

sendo $N_p = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$.

SOLUÇÃO:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}y = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}x = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $N_p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. E a equação do plano tangente é dada por

$$N_p \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow z - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

EXERCÍCIO 7. Determine uma equação de $T_p S$ dado que $p = (2, 1, 3)$ e as curvas

$$c_1(t) = (2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2)$$

$$c_2(u) = (1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1)$$

estão em S .

Como as curvas dadas estão em S , conhecemos pelo menos dois vetores tangentes à S :

$$c_1'(t) = (3, -2t, -4 + 2t)$$

$$c_2'(u) = (2u, 6u^2, 2).$$

Note que ambas as curvas passam pelo ponto p . Isso ocorre quando $t = 0$ e $u = 1$:

$$c_1(0) = c_2(1) = (2, 1, 3).$$

Logo $c_1'(0) = (3, 0, -4)$ e $c_2'(1) = (2, 6, 2)$ são vetores tangentes à S no ponto $(2, 1, 3)$ e então são ambos paralelos ao plano tangente à S em p .

O vetor normal ao plano tangente é dado por

$$c_1'(0) \times c_2'(1) = (3, 0, -4) \times (2, 6, 2) = (24, -14, 18).$$

A equação do plano tangente é então $N_p \cdot ((x, y, z) - (2, 1, 3)) = 0$, i.e:

$$24(x - 2) - 14(y - 1) + 18(z - 3) = 0.$$

Simplificando,

$$12x - 7y + 9z = 44.$$

EXERCÍCIOS EXTRAS

EXERCÍCIO 8. Seja f diferenciável e $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$, $f_y(2, 5) = -1$. Use aproximação linear para estimar $f(2.2, 4.9)$.

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(2, 5) + f_x(2, 5)(x - 2) + f_y(2, 5)(y - 5) \\ &= 6 + (x - 2) - (y - 5). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(2.2, 4.9) \approx 6 + (2.2 - 2) - (4.9 - 5) = 6.3.$$

 EXERCÍCIO 9. Determine a diferencial da função $f(t, x) = e^{-2x} \cos(2\pi t)$.

SOLUÇÃO: Por definição,

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx.$$

Então, como $\frac{\partial f}{\partial t} = -2\pi e^{-2x} \text{sen}(2\pi t)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-2x} \cos(2\pi t)$, temos

$$df = -2\pi e^{-2x} \text{sen}(2\pi t) dt - 2e^{-2x} \cos(2\pi t) dx.$$