Neemias Martins
neemias.org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Regra da Cadeia

Exercício 1. Seja $z = x^2 + xy^3$ com $x = uv^2 + w^3$ e $y = u + ve^w$. Determine $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2, v = 1, w = 0$.

Solução:
Pela Regra da Cadeia, temos

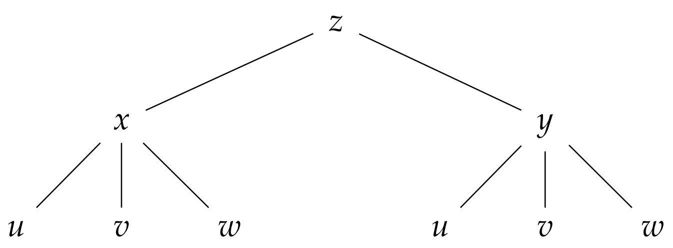
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (2x + y^3)v^2 + 3xy^2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (2x + y^3)2uv + 3xy^2e^w$$
$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = (2x + y^3)3w^2 + 3xy^2ve^w.$$

Quando $u = 2, v = 1, w = 0$, temos

$$x = 2, y = 3,$$

logo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 31 \cdot 1 + 54 \cdot 1 = 85,$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = 31 \cdot 4 + 54 \cdot 1 = 178$$
$$\frac{\partial z}{\partial w} = 31 \cdot 0 + 54 \cdot 1 = 54.$$



Exercício 2. Suponha que a equação $e^z = xyz$ determine $z = f(x, y)$ como função de x e y. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solução 1: Seja $F(x, y, z) = e^z - xyz = 0$. Então, pela regra de derivação implícita, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

Solução 2: Derivando a equação $e^z = xyz$ em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned} e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= yz + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(e^z - xy) &= yz \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{yz}{e^z - xy}. \end{aligned}$$

De modo análogo, derivando $e^z = xyz$ em relação a y,

$$\begin{aligned} e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= xz + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(e^z - xy) &= xz \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xz}{e^z - xy}. \end{aligned}$$

Para deduzir as fórmulas usadas na Solução 1, basta derivar $F(x, y, z) = 0$ em relação a x e y, respectivamente, lembrando-se que $z = f(x, y)$.

Exercício 3. Mostre que qualquer função da forma

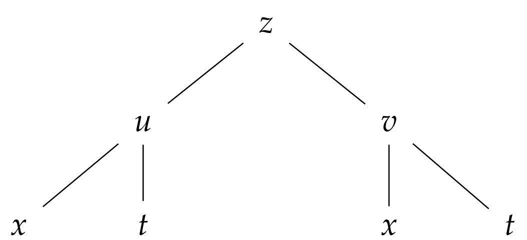
$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

[Dica: $u = x + at$, $v = x - at$.]

Solução: Sejam $u := x + at$ e $v := x - at$. Então, $z = f(u) + g(v)$. Logo, $\frac{\partial z}{\partial u} = f'(u)$ e $\frac{\partial z}{\partial v} = g'(v)$.



Então,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = af'(u) - ag'(v),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= a\frac{\partial}{\partial t}[f'(u) - g'(v)] \\ &= a\left(\frac{\partial f'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial f'(u)}{\partial v}}\frac{\partial v}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial g'(v)}{\partial u}}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial g'(v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ &= a^2[f''(u) + g''(v)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) + g'(v), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}[f'(u) + g'(v)] \\ &= \frac{\partial f'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial f'(u)}{\partial v}}\frac{\partial v}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial g'(v)}{\partial u}}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g'(v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f''(u) + g''(v).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

Exercício 4. Determine a derivada direcional de $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$ no ponto $p = (0,0,0)$ na direção e sentido do vetor $v = (5,1,-2)$

Solução:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) \\ &= (e^y + ze^x, xe^y + e^z, ye^z + e^x).\end{aligned}$$

Logo, $\nabla f(0,0,0) = (1,1,1)$. Um vetor unitário na direção de $v = (5,1,-2)$ é

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}D_{\hat{v}}f(0,0,0) &= \nabla f(0,0,0)\cdot\hat{v} \\ &= (1,1,1)\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{30}}.\end{aligned}$$

Exercício 5. Determine equações de plano tangente e reta normal a uma superfície dada no ponto especificado:

$$S = \{xyz^2 = 6\}, \quad p = (3,2,1).$$

Solução: Seja $F(x,y,z) = xyz^2$. (S é a superfície de nível de equação $F(x,y,z) = 6$). Temos

$$\nabla F(x,y,z) = (yz^2, xz^2, 2xyz),$$

daí

$$\nabla F(3,2,1) = (2,3,12).$$

Equação de $T_pS = \{(x,y,z)) \in \mathbb{R}^3 |\, \nabla F(p) \cdot ((x,y,z) - p) = 0\}$:

$$\begin{aligned} &\nabla F(3,2,1) \cdot (x-3, y-2, z-1) = 0 \\ \Leftrightarrow &2(x-3) + 3(y-2) + 12(z-1) = 0. \end{aligned}$$

Equação da reta normal $R_p = \{p + tN_p |\, t \in \mathbb{R}\}$:

$$(x,y,z) = (3,2,1) + t(2,3,12); t \in \mathbb{R},$$

escrevendo em equações simétricas:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{F_x(3,2,1)} &= \frac{y-2}{F_y(3,2,1)} = \frac{z-1}{F_z(3,2,1)} \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} &= \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{12} \end{aligned}$$

Exercício 6. Determine a derivada direcional da função $z = f(x,y)$, na direção do vetor $(2,2)$ e no ponto $(0,1)$, sendo z definida implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0.$$

Qual é o valor máximo da derivada direcional de $z = f(x,y)$ no ponto $(0,1)$?

Solução: Um vetor unitário da direção de $u = (2,2)$ é $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{8}}(2,2)$. A derivada direcional é dada por:

$$D_u f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \hat{u}.$$

Vamos calcular o vetor gradiente em $(0,1)$: $\nabla f(0,1) = (f_x(0,1), f_y(0,1))$. Substituindo $x = 0$ e $y = 1$ em $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0$, obtemos

$$1 + z^3 = 0 \Rightarrow z = -1.$$

Seja $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$. Então,

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z) &= 3x^2 + yz \\ F_y(x,y,z) &= 3y^2 + xz \\ F_z(x,y,z) &= 3z^2 + xy. \end{aligned}$$

Então,

$$f_x(0,1) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1,-1)} = -\frac{F_x(0,1,-1)}{F_z(0,1,-1)} = \frac{1}{3}$$

$$f_y(0,1) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1,-1)} = -\frac{F_y(0,1,-1)}{F_z(0,1,-1)} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_u f(0,1) &= \left(\frac{1}{3}, -1\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}\right) \\ &= \frac{2}{3\sqrt{8}} - \frac{2}{\sqrt{8}} = -\frac{4}{3\sqrt{8}}. \end{aligned}$$

O valor máximo da derivada direcional, que ocorre na direção do gradiente, é dado por

$$|\nabla f(0,1)| = \left|\left(\frac{1}{3}, -1\right)\right| = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Valores Máximo e Mínimo

> Exercício 7. Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função
> $$f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2.$$

Solução:
As derivadas parciais de primeira ordem são dadas por:

$$\begin{aligned} f_x &= -2 - 2x \\ f_y &= 4 - 8y. \end{aligned}$$

Para encontrarmos os pontos críticos, devemos resolver as equações

$$\begin{cases} -2 - 2x = 0 & (1) \\ 4 - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Da Equação (1), temos $2x = -2 \Rightarrow x = -1$. Da Equação (2), $8y = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Então o único ponto crítico é $(-1, \frac{1}{2})$.

Agora vamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem e $D(x,y)$:

$$f_{xx} = -2 \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{yy} = -8$$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-8) - 0^2 = 16.$$

Como $D(-1, \frac{1}{2}) = 16 > 0$ e $f_{xx}(-1, \frac{1}{2}) = -2 < 0$, então pelo Teste da Segunda Derivada $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$ é um máximo local.

Exercícios Extras

> ✎ Exercício 8. Uma função f é dita **homogênea de grau** n se $f(tx, ty) = t^n f(x,y)$ para todo t, sendo n um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.
> (a) Verifique que $f(x,y) = x^2 y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.
> (b) Mostre que que, se f é homogênea de grau n, então
> $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y).$$
> [Dica: Use a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ em relação a t.]

Solução: (a) Como f é uma função polinomial, f é contínua e possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas e

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= (tx)^2(ty) + 2(tx)(ty)^2 + 5(ty)^3 \\ &= t^3x^2y + 2t^3xy^2 + 5t^3y^3 \\ &= t^3(x^2y + 2xy^2 + 5y^3) \\ &= t^3 f(x,y). \end{aligned}$$

Portanto, f é homogênea de grau 3.

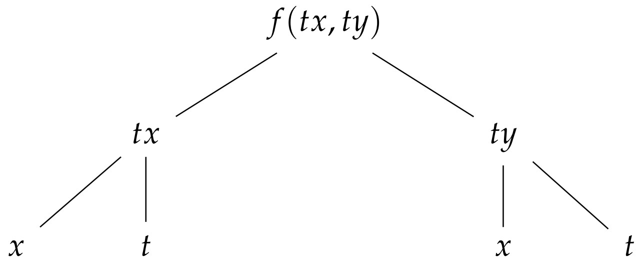
(b) Seja f homogênea de grau n. Diferenciando ambos os lados de $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ em relação a t :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx,ty) = \frac{\partial}{\partial t}[t^n f(x,y)] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial(tx)} f(tx,ty) \cdot \frac{\partial(tx)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial(ty)} f(tx,ty) \cdot \frac{\partial(ty)}{\partial t} = x\frac{\partial}{\partial(tx)} f(tx,ty) + y\frac{\partial}{\partial(tx)} f(tx,ty) = nt^{n-1} f(x,y).$$

Tomando $t = 1$:

$$x\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + y\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = nf(x,y).$$



> **Exercício 9.** Determine a derivada direcional de $f(x,y) = ye^{-x}$ no ponto $p = (0,4)$ no sentido do ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Solução: $f(x,y) = ye^{-x} \Rightarrow f_x(x,y) = -ye^{-x}$ e $f_y = e^{-x}$. Se u é um vetor unitário na direção do ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$, i.e. $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, então

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\operatorname{sen}\theta,$$

logo,

$$\begin{aligned} D_u f(0,4) &= f_x(0,4)\cos\frac{2\pi}{3} + f_y(0,4)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ &= -4(-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

> **Exercício 10.** Determine a taxa de variação máxima de $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ no ponto $p = (1,0)$ e a direção em que isso ocorre.

Solução: $\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$. Logo, $\nabla f(1,0) = (0,1)$.

Então a variação máxima é dada por $|\nabla f(1,0)| = 1$ e ocorre na direção do vetor gradiente $(0,1)$.

EXERCÍCIO 11. Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ e suponha que $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4$. Determine $g'(0)$.

SOLUÇÃO:

Pela Regra da Cadeia, fazendo

$$x = 3t^2, y = t^3, z = e^{2t},$$

temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow g'(t) = 6t\frac{\partial f}{\partial x}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 2e^{2t}\frac{\partial f}{\partial z}(3t^2, t^3, e^{2t}).$$

$$\begin{tikzcd}
 & f \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
x \arrow[d, dash] & y \arrow[d, dash] & z \arrow[d, dash] \\
t & t & t
\end{tikzcd}$$

Para $t = 0$, como $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4$, temos

$$g'(0) = 2\frac{\partial f}{\partial z(0,0,1)} = 8.$$

EXERCÍCIO 12. Seja $f(u, v, w)$ diferenciável. Mostre que se $u = x - y, v = y - z$ e $w = z - x$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

SOLUÇÃO: Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\right) = 0.$$

EXERCÍCIO 13. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

Solução: Seja $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. O plano tangente à F em um ponto (a,b,c) satisfaz:

$$\begin{aligned}
&\nabla F(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2a, 2b, -2c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2a(x-a) + 2b(y-b) - 2c(z-c) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2ax - 2a^2 + 2by - 2b^2 - 2cz + 2c^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(ax + by - cz) - 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow ax + by - cz - (a^2 + b^2 - c^2) = 0.
\end{aligned}$$

Uma vez que (a,b,c) pertence ao cone, então $a^2 + b^2 = c^2$, ou seja

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

Então, todo ponto (x,y,z) do plano tangente satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
&ax + by - cz - (a^2 + b^2 - c^2) = 0 \\
&\Rightarrow ax + by - cz = 0.
\end{aligned}$$

Observe que essa equação é verdadeira para $(x,y,z) = (0,0,0)$:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 - c \cdot 0 = 0.$$

Portanto, qualquer plano tangente ao cone passa por $(0,0,0)$.