Neemias Martins
neemias.org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Exercícios de Revisão

Exercício 1. Mostre que não existe f com derivadas parciais dadas por

$$f_x(x,y) = e^{xy} + \text{sen}(x+y) \text{ e } f_y(x,y) = \cos(xy).$$

Solução: Temos

$$f_{xy}(x,y) = xe^{xy} + \cos(x+y) \text{ e } f_{yx}(x,y) = -y\,\text{sen} xy.$$

Logo, $f_{xy}(x,y) \neq f_{yx}(x,y)$, por exemplo $f_{xy}(0,0) = 1 \neq 0 = f_{yx}(0,0)$. Como f_{xy} e f_{yx} são contínuas e $f_{xy}(x,y) \neq f_{yx}(x,y)$, segue pelo Teorema de Schwarz que não existe f.

Exercício 2. Verifique se f é diferenciável ou não.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução: Mostraremos que f não é contínua em $(0,0)$. Temos $f(0,0) = 0$. Vamos calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

• Sobre o eixo x :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} f(x,0) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4+0} \\ &= \lim_{x\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

• Sobre a reta $y = x$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} f(x,x) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y),$$

segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Logo f não é contínua em $(0,0)$. Portanto f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 3. Suponha que em certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a): Determine a taxa de variação do potencial no ponto $p = (3,4,5)$ em direção ao ponto $q = (4,5,4)$.

(b): Determine a direção e sentido em que V varia mais rapidamente e calcule a taxa de variação máxima.

Solução:(a) O vetor gradiente é dado por

$$\begin{aligned} &\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz, -3x + xz, xy) \\ &\Rightarrow \nabla V(3,4,5) = (38,6,12). \end{aligned}$$

Considere o vetor $u = \vec{pq} = (4-3, 5-4, 4-5) = (1,1,-1)$. Um vetor unitário na direção e sentido de u é

$$\hat{u} = \frac{(1,1,-1)}{|(1,1,-1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1).$$

A taxa de variação de V em p na direção de $\hat{u}$ é

$$\begin{aligned} D_{\hat{u}}V(3,4,5) &= \nabla V(3,4,5) \cdot \hat{u} \\ &= (38,6,12) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \\ &= \frac{32}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(b) A direção e sentido de maior crescimento de V é dada pelo vetor gradiente $\nabla V(3,4,5) = (38,6,12) = 2(19,3,6)$ ou, de modo equivalente, pelo vetor $(19,3,6)$. A taxa de variação máxima é dada por

$$|\nabla V(3,4,5)| = |(38,6,12)| = \sqrt{(38)^2 + 6^2 + (12)^2} = \sqrt{1624} = 2\sqrt{406}.$$

Exercício 4. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Solução: Os pontos críticos de f satisfazem a igualdade:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0,0).$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow x^2 - y = 0 & (1) \\ 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow y^2 - x = 0 & (2) \end{cases}$$

Da Equação (1), temos $y = x^2$. Substituindo na Equação (2), obtemos

$$\begin{aligned} &x^4 - x = 0 \\ &\Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Se $x = 0$, temos $y = 0$. Se $x = 1$, então $y = 1$. Os pontos críticos são $(0,0)$ e $(1,1)$. A fim de classificar os pontos críticos, calculamos as derivadas parciais de segunda ordem e o determinante da matriz Hessiana.

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = f_{yx} = -3,\ f_{yy} = 6y.$$
$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy} = 36xy - 9.$$

Então, pelo Teste da Segunda Derivada:

- Como $D(0,0) = -9 < 0$, o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela e $f(0,0) = 4$.
- Como $D(1,1) = 27 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, então $f(1,1) = 3$ é valor mínimo local, ou seja, f possui um mínimo local em $(1,1)$.

> EXERCÍCIO 5. Encontre todos os valores extremos da função $f(x,y) = xy$ sobre a elipse
> $$x^2 + 4y^2 = 8$$
> e classifique-os como máximo ou mínimo.

SOLUÇÃO:

• PASSO 1: Considere

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2.$$

Note que 8 é valor regular de g, ou seja,

$$\nabla g(x,y) = (2x, 8y) \neq (0,0) \text{ para todo } (x,y) \text{ que satisfaz } x^2 + 4y^2 = 8,$$

pois $(2x, 8y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ e $0^2 + 4 \cdot 0^2 \neq 8$.

• PASSO 2: Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g \text{ e } g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 8.$$

Logo,

$$\begin{cases} y = 2x\lambda & (1) \\ x = 8y\lambda & (2) \\ x^2 + 4y^2 = 8 & (3) \end{cases}$$

Note que $x, y \neq 0$. Ainda, pelas equações (1) e (2) obtemos

$$\lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{8y}$$
$$\Rightarrow 8y^2 = 2x^2$$
$$\Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{4}$$
$$\Rightarrow y = \pm\frac{x}{2}.$$

Substituindo na Equação (3), obtemos

$$x^2 + 4y^2 = 8$$
$$x^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 8$$
$$\Rightarrow 2x^2 = 8$$
$$\Rightarrow x^2 = 4$$
$$\Rightarrow x = \pm 2.$$

As soluções são então $(2,1), (-2,-1), (2,-1)$ e $(-2,1)$.

• PASSO 3: Como $B = \{(x,y)|x^2+4y^2=8\}$ é compacto (limitado e fechado) e f é contínua, então f admite extremos absolutos em B. Temos

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 2 > f(-2,1) = f(2,-1) = -2,$$

então o valor máximo global de f sobre a elipse é 2 e o valor mínimo global é -2.

EXERCÍCIOS EXTRAS

EXERCÍCIO 6. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2+y^2=z^2$ passa pela origem.

SOLUÇÃO: Seja $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$. O plano tangente à F em um ponto (a,b,c) satisfaz:

$$\begin{aligned}
&\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0\\
&\Leftrightarrow (2a,2b,-2c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0\\
&\Leftrightarrow 2a(x-a)+2b(y-b)-2c(z-c)=0\\
&\Leftrightarrow 2ax-2a^2+2by-2b^2-2cz+2c^2=0\\
&\Leftrightarrow 2(ax+by-cz)-2(a^2+b^2-c^2)=0\\
&\Leftrightarrow ax+by-cz-(a^2+b^2-c^2)=0.
\end{aligned}$$

Uma vez que (a,b,c) pertence ao cone, então $a^2+b^2=c^2$, ou seja

$$a^2+b^2-c^2=0.$$

Então, todo ponto (x,y,z) do plano tangente satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
&ax+by-cz-(a^2+b^2-c^2)=0\\
&\Rightarrow ax+by-cz=0.
\end{aligned}$$

Observe que essa equação é verdadeira para $(x,y,z)=(0,0,0)$:

$$a\cdot 0+b\cdot 0-c\cdot 0=0.$$

Portanto, qualquer plano tangente ao cone passa por $(0,0,0)$.

EXERCÍCIO 7. Determine os máximos e mínimos absolutos de f no conjunto D.

$$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2);\ D \text{ é o disco } x^2+y^2\le 4.$$

SOLUÇÃO: Primeiro vamos investigar no interior do disco. Procuramos pelos pontos críticos de f :

$$\nabla f(x,y) = (2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2), 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2)) = (0,0).$$

Agora,

$$f_x = 2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x^2+2y^2=1.$$

Se $x=0$, então de $f_y=0$ obtemos

$$2ye^{-y^2}(2-2y^2)=0 \Rightarrow y=0 \text{ ou } y=\pm 1.$$

Daí, temos os pontos $(0,0),(0,1),(0,-1)$.

Agora, se $x^2+2y^2=1$, então de $f_y=0$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2) = 2ye^{-x^2-y^2}(2-(x^2+2y^2)) = 2ye^{-x^2-y^2} \\ &\Rightarrow y=0. \end{aligned}$$

Daí, substituindo $y=0$ em $x^2+2y^2=1$, obtemos $x=\pm 1$. O que nos dá os pontos $(1,0),(-1,0)$.

Agora analisemos os pontos críticos na fronteira de D. Como na fronteira temos $x^2+y^2=4$, então $f(x,y)=e^{-4}(4+y^2)=\dfrac{4+y^2}{e^4}$. Note que o menor valor de f (na fronteira) ocorre quando $y=0$ (logo $x^2=4$ e assim $x=\pm 2$) e o maior ocorre quando $y^2=4$ i.e $y=\pm 2$ (e nesse caso $x=0$.) Ou seja, temos os pontos $(2,0),(-2,0),(0,2),(0,-2)$.

Como o disco D é um conjunto **compacto** (limitado e fechado) e f é contínua em D, então f admite máximos e mínimos absolutos em D. Comparando os valores de f nos pontos críticos, temos

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(0,\pm 1) &= 2e^{-1} = \frac{2}{e} \\ f(\pm 1,0) &= e^{-1} = \frac{1}{e} \\ f(\pm 2,0) &= 4e^{-4} = \frac{4}{e^4} \\ f(0,\pm 2) &= 8e^{-4} = \frac{8}{e^4}. \end{aligned}$$

Portanto, em D o valor máximo absoluto de f é $f(0,\pm 1)=2e^{-1}$ e o valor mínimo absoluto é $f(0,0)=0$.

Observação: A análise dos pontos críticos e máximos/mínimos na fronteira de D (i.e quando $x^2+y^2=4$) também pode ser feita usando os Multiplicadores de Lagrange.

EXERCÍCIO 8. Determine os valores máximo/mínimo da função $f(x,y,z)=x+2y$ na curva da interseção do plano $x+y+z=1$ com o cilindro $y^2+z^2=4$.

SOLUÇÃO: Seja $g(x,y,z)=x+y+z=1$ e $h(x,y,z)=y^2+z^2=4$. Observe que:

- 1 é valor regular de g, pois $\nabla g(x,y,z)=(1,1,1)\neq(0,0,0)$ para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
- 4 é valor regular de h, pois $\nabla h(x,y,z)=(0,2y,2z)\neq(0,0,0)$ sempre que $y^2+z^2=4$. (Note que $(0,2y,2z)=(0,0,0)$ se e só se $y=z=0$ mas $0^2+0^2\neq 4$.)
- ∇g não é paralelo a ∇h, pois $(1,1,1)\neq k(0,2y,2z)$ para todo $k\in\mathbb{R}$.

Podemos então usar o Método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrarmos nossos candidatos a máximos e mínimos de f sobre a curva.

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, devemos resolver as equações

$$\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h, \qquad g(x,y,z)=1, \qquad h(x,y,z)=4.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 1=\lambda & (1) \\ 2=\lambda+2\mu y & (2) \\ 0=\lambda+2\mu z & (3) \\ x+y+z=1 & (4) \\ y^2+z^2=4 & (5) \end{cases}$$

Substituindo $\lambda = 1$ em (2), obtemos

$$2\mu y = 1 \Rightarrow \mu y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2\mu}.$$

Substituindo $\lambda = 1$ em (3), obtemos

$$2\mu z = -1 \Rightarrow \mu z = \frac{-1}{2} \Rightarrow z = \frac{-1}{2\mu}.$$

Da equação (4), temos então

$$x + y + z = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Da equação (5), temos

$$y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{4\mu^2} + \frac{1}{4\mu^2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2\mu^2} = 4 \Rightarrow \mu^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Substituindo o valor encontrado de μ nas expressões de y e z acima, obtemos os seguintes possíveis pontos : $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Agora, observe que a interseção entre o plano e o cilindro é dado por uma elipse - que é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$, e como f é contínua, então f admite máximos e mínimos absolutos na curva de interseção. Portanto, uma vez que $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$ e $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$, então $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ é ponto de máximo absoluto de f sobre a curva e $(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$ é ponto de mínimo absoluto de f sobre a curva.