Neemias Martins
neemias.org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Integrais duplas

Exercício 1. Calcule a integral iterada

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(y+y^2\cos x)dxdy.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(y+y^2\cos x)dxdy &= \int_{-3}^{3}\left[yx+y^2\operatorname{sen}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}dy\\
&= \int_{-3}^{3}(y\frac{\pi}{2}+y^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})-(y\cdot 0+y^2\operatorname{sen}0)dy\\
&= \int_{-3}^{3}\frac{\pi}{2}y+y^2dy\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\Big|_{-3}^{3}\\
&= (9\frac{\pi}{4}+\frac{27}{3})-(9\frac{\pi}{4}-\frac{27}{3})\\
&= 18
\end{aligned}$$

Exercício 2. Determine o volume do sólido limitado pelo paraboloide

$$z=2+x^2+(y-2)^2$$

e pelos planos $z=1, x=1, x=-1, y=0$ e $y=4$.

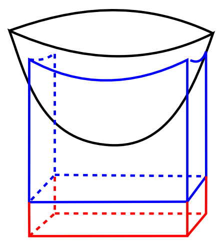
Solução: Note que $z=2+x^2+(y-2)^2\geq 0$ para todo (x,y). Logo, o volume do sólido que está acima do retângulo $R=[-1,1]\times[0,4]$ e abaixo da superfície $z=2+x^2+(y-2)^2$ é dado por

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{4}2+x^2+(y-2)^2dydx.$$

O volume do sólido limitado pelo paraboloide, pela região R e pelo plano $z=1$ é então dado por:

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{4}2+x^2+(y-2)^2dydx-2\cdot 4\cdot 1.$$

(A expressão em vermelho representa o volume do sólido retangular $[-1,1]\times[0,4]\times[0,1]$.)



Fazendo $u = y - 2$, temos $du = dy$, logo $\int (y-2)^2 dy = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(y-2)^3}{3} + c$. Então:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{4} 2 + x^2 + (y-2)^2 dydx &= \int_{-1}^{1} \left[(2+x^2)y + \frac{(y-2)^3}{3}\right]_0^4 dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left((2+x^2)4 + \frac{8}{3}\right) - \left((2+x^2)0 - \frac{8}{3}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} 4x^2 + 8 + \frac{16}{3} dx = \int_{-1}^{1} 4x^2 + \frac{40}{3} dx \\
&= 4\frac{x^3}{3} + \frac{40}{3}x \Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{4}{3} + \frac{40}{3} + \frac{4}{3} + \frac{40}{3} = \frac{88}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$V = \frac{88}{3} - 8 = \frac{64}{3}.$$

Exercício 3. Determine o valor médio de $f(x,y) = x^2y$ sobre o retângulo R de vérticies $(-1,0), (-1,5), (1,5), (1,0)$.

Solução:

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \int\int_R f(x,y) dA,$$

sendo $A(R)$ a área do retângulo R.

Temos $R = [-1,1] \times [0,5]$, logo $A(R) = 2 \cdot 5 = 10$, então

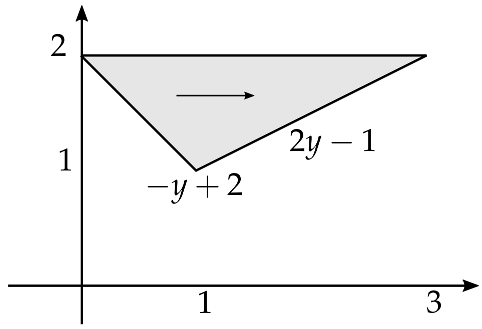
$$\begin{aligned}
f_{\text{med}} &= \frac{1}{10}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{5} x^2 y dydx \\
&= \frac{1}{10}\int_{-1}^{1} x^2 \frac{y^2}{2}\Big]_0^5 dx \\
&= \frac{1}{10}\int_{-1}^{1} \frac{25}{2} x^2 dx \\
&= \frac{25}{20}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Exercício 4. Calcule a integral dupla

$$\int\int_D y^3 dA$$

sendo D a região triangular com vértices $(0,2), (1,1), (3,2)$.

Solução: Observe na figura que D é uma região do Tipo II:



Para encontrarmos as expressões das retas $h_1(y)$ e $h_2(y)$ que delimitam D, fazemos

- $h_1(y) = x = ay + b$. Como $(0,2)$ e $(1,1)$ estão na reta $x = ay + b$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 2 + b \Rightarrow b = -2a \\ 1 &= a \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1 - a \\ &\Rightarrow -2a = 1 - a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 2. \end{aligned}$$

  Logo $h_1(y) = -y + 2$.
- $h_2(y) = x = ay + b$. Como $(1,1)$ e $(3,2)$ estão na reta $x = ay + b$, temos

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1 - a \\ 3 &= a \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3 - 2a \\ &\Rightarrow 1 - a = 3 - 2a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -1. \end{aligned}$$

  Logo $h_2(y) = 2y - 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int\int_D y^3 dA &= \int_1^2 \int_{-y+2}^{2y-1} y^3 dx dy = \int_1^2 [xy^3]_{x=-y+2}^{x=2y-1} dy \\ &= \int_1^2 y^3[(2y-1) - (-y+2)]dy \\ &= \int_1^2 y^3[3y-3]dy \\ &= \int_1^2 3y^4 - 3y^3 dy \\ &= \frac{3}{5}y^5 - \frac{3}{4}y^4 \Big|_1^2 \\ &= \frac{96}{5} - 12 - \frac{3}{5} + \frac{3}{4} = \frac{147}{20}. \end{aligned}$$

Integrais duplas sobre regiões gerais

Exercício 5. Determine o volume do sólido que está abaixo do plano $x - 2y + z = 1$ e acima da região limitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$.

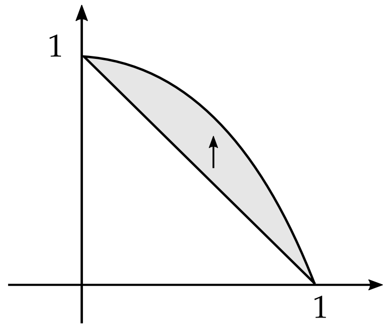
Solução: Como $x - 2y + z = 1$, então $z = 1 - x + 2y$. A região é limitada pelas curvas:

(1) $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$
(2) $x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2$.

Vejamos os pontos de intersecção:

$$\begin{aligned} 1 - x = 1 - x^2 &\Rightarrow x^2 - x = 0 \\ &\Rightarrow x(x-1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Note que a região D é do Tipo I.



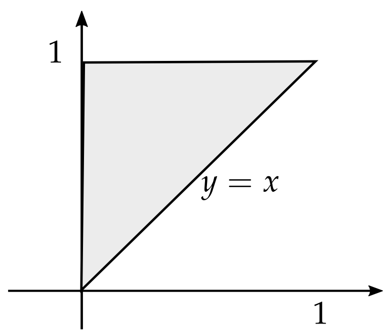
Portanto,

$$\begin{aligned} \int\int_D (1 - x + 2y)dA &= \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} (1 - x + 2y)dydx \\ &= \int_0^1 [(1-x)y + y^2]_{1-x}^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 [(1-x)(1-x^2) + (1-x^2)^2 - 2(1-x)^2]dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^2 - x + x^3 + 1 - 2x^2 + x^4 - 2 + 4x - 2x^2)dx \\ &= \int_0^1 (x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x)dx \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{17}{60}. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 6. Calcule a integral iterada invertendo a ordem de integração.

$$\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)dydx.$$

SOLUÇÃO: A região de integração é do Tipo I, inverteremos a fim de obter uma região do Tipo II:



$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)dydx &= \int_0^1 \int_0^y \cos(y^2)dxdy \\
&= \int_0^1 \left[x \cdot \cos(y^2)\right]_0^y dy \\
&= \int_0^1 y \cdot \cos(y^2)dy \quad (\star) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(y^2)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(1).
\end{aligned}$$

$(\star)$ Substituição $u = y^2 \Rightarrow du = 2ydy \Rightarrow \int y\cos(y^2)dy = \frac{1}{2}\cos(u)du = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) + C$.

Exercícios Extras

Exercício 7. Calcule

$$\int\int_R ye^{-xy}dA; \quad R = [0,2] \times [0,3].$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int\int_R ye^{-xy}dA &= \int_0^3 \int_0^2 ye^{-xy}dxdy \quad (\star) \\
&= \int_0^3 -e^{-xy}\Big|_0^2 dy \\
&= \int_0^3 -e^{-2y} + 1dy = \int_0^3 -e^{-2y}dy + \int_0^3 1dy \quad (\star\star) \\
&= \frac{e^{-2y}}{2} + y\Big|_0^3 \\
&= \frac{e^{-6}}{2} + 3 - \frac{1}{2} = \frac{e^{-6}}{2} + \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

$(\star)$ substituição $u = -xy \Rightarrow du = -ydx \Rightarrow \int ye^{-xy}dx = \int -e^u du = -e^u + C$
$(\star\star)$ substituição $v = -2y \Rightarrow dv = -2dy$