Neemias Martins
neemias.org/ped
neemias@ime.unicamp.br

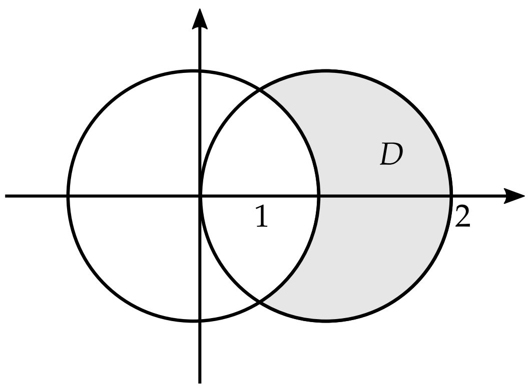
Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Integrais duplas em coordenadas polares

Exercício 1. Utilize a integral dupla para determinar a área da região dentro do círculo $(x-1)^2+y^2=1$ e fora do círculo $x^2+y^2=1$.

Solução:



Em coordenadas polares, temos $x^2+y^2=r^2$ e $x=r\cos\theta$, logo

$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2=1 &\Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1\\ &\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\\ &\Rightarrow r=2\cos\theta.\end{aligned}$$

Ainda,

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1 \text{ pois } r\geq 0.$$

Vejamos em que pontos as duas curvas se intersectam:

$$\begin{aligned}&r^2=1, \quad r=2\cos\theta\\ &\Rightarrow 4\cos^2\theta=1\\ &\Rightarrow \cos^2\theta=\frac{1}{4}\\ &\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{1}{2}\\ &\Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
A(D) = \int\int_D dA &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[2 \cdot \frac{1+\cos(2\theta)}{2} - \frac{1}{2}\right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\right] d\theta \quad (\star) \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\theta \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\big(\frac{2\pi}{3}\big) + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\big(-\frac{2\pi}{3}\big) + \frac{\pi}{6} \\
&= \operatorname{sen}\big(\frac{2\pi}{3}\big) + \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

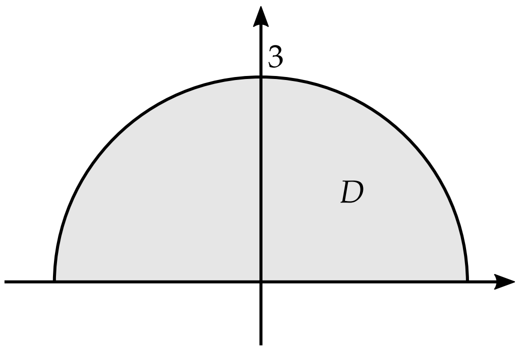
$(\star)$ Substituição: $u = 2\theta$.

EXERCÍCIO 2. Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares:

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \text{sen}(x^2+y^2)dydx.$$

SOLUÇÃO:
A região de integração é dada por $-3 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$. Note que

$$y = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9; y \geq 0.$$



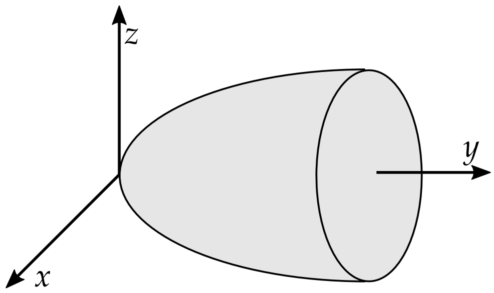
Em coordenadas polares, temos $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\theta$, $x^2+y^2 = r^2$. Então:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \text{sen}(x^2+y^2)dydx &= \int_0^{\pi}\int_0^3 \text{sen}(r^2)\cdot rdrd\theta \quad (\star)\\
&= \int_0^{\pi}[-\frac{1}{2}\cos(r^2)]_0^3 d\theta\\
&= \int_0^{\pi}(-\frac{1}{2}\cos(9)+\frac{1}{2})d\theta\\
&= \frac{1}{2}(1-\cos(9))\theta\Big|_0^{\pi}\\
&= \frac{\pi}{2}(1-\cos(9)).
\end{aligned}$$

($\star$) Substituição: $u = r^2$.

EXERCÍCIO 3. Determine a área da parte finita do paraboloide $y = x^2 + z^2$ limitada pelo plano $y = 25$.

SOLUÇÃO:



Se projetarmos a superfície sobre o plano-xz, obtemos: $x^2 + z^2 \leq 25$. Temos $f(x,z) = y = x^2 + z^2$, então

$$A(S) = \iint\limits_{x^2+z^2 \leq 25} \sqrt{[f_x(x,z)]^2 + [f_z(x,z)]^2 + 1} dA = \iint\limits_{x^2+z^2 \leq 25} \sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1} dA$$

Passando para coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $z = r\cos\theta$, obtemos

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \sqrt{4r^2+1} \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 (4r^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot r dr \quad (\star) \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (4r^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{12} (101^{\frac{3}{2}} - 1) \\ &= \frac{\pi}{6} (101\sqrt{101} - 1). \end{aligned}$$

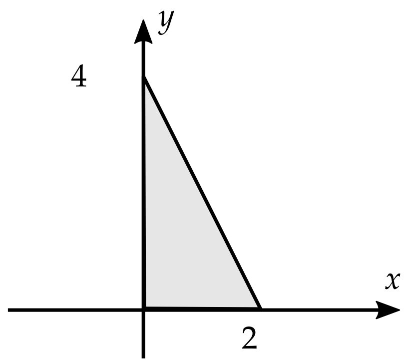
$(\star)$ Substituição: $u = 4r^2 + 1 \Rightarrow du = 8r dr$

EXERCÍCIO 4. Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro limitado pelo planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$.

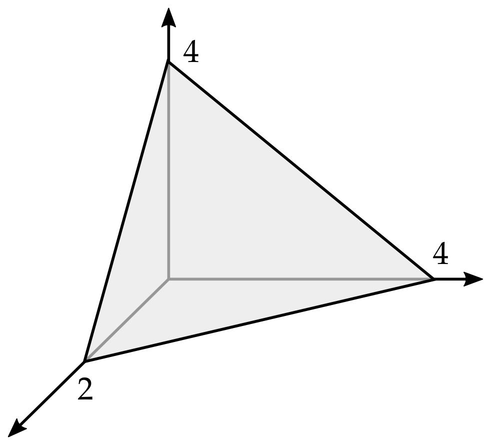
SOLUÇÃO:
O plano $2x + y + z = 4$ intersecta o plano-xy quando $z = 0$, ou seja,

$$2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x.$$

A projeção do tetraedro no plano-xy é dada pela região na figura abaixo:



(Temos $z = 4 - 2x - y$. Fazendo a intersecção com os planos xz e yz obtemos a retas $z = 4 - 2x$ e $z = 4 - y$, respectivamente - o que nos ajuda a fazer um esboço do tetraedro.)



Então,

$$E = \{(x, y, z);\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4 - 2x,\ 0 \leq z \leq 4 - 2x - y\}.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_E dV \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-y-2x} dz dy dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4-2x-y)\, dy dx \\
&= \int_0^2 \left[(4-2x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-2x} dx \\
&= \int_0^2 \left((4-2x)^2 - \frac{(4-2x)^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^2 \frac{2(4-2x)^2 - (4-2x^2)}{2}\, dx \\
&= \int_0^2 \frac{(4-2x)^2}{2}\, dx \\
&= \int_0^2 \frac{16-16x+4x^2}{2}\, dx \\
&= \int_0^2 (8-8x+2x^2)\, dx \\
&= \left[8x - 4x^2 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}
$$

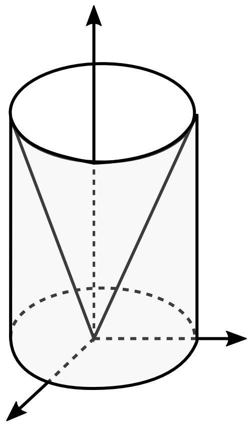
Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Exercício 5. Utilize coordenadas cilíndricas para calcular

$$\int\int\int_E x^2 dV$$

em que E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2+y^2=1$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z^2=4x^2+4y^2$.

Solução:



Usando coordenadas cilíndricas, fazemos

$$x = r\cos\theta, y = r\,\text{sen}\theta, z = z.$$

O cilindro e o cone são descritos por

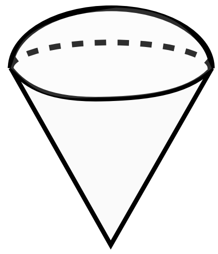
$$\begin{aligned} x^2+y^2=1 &\Rightarrow r^2=1 \\ z^2=4x^2+4y^2 &\Rightarrow z = 2\sqrt{x^2+y^2}, z\geq 0 \Rightarrow z=2r. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int\int\int_E x^2 dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2r} r^2\cos^2\theta\cdot r\,dzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [(r^3\cos\theta)z]_0^{2r}\,drd\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos^2\theta\,drd\theta \\ &= \frac{2}{5}\int_0^{2\pi}[r^5\cos^2\theta]_0^1\,d\theta \\ &= \frac{2}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{2}{5}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{5}\left[\theta+\frac{1}{2}\text{sen}(2\theta)\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 6. Determine o volume do sólido que é limitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

SOLUÇÃO:



Usaremos coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta, y = r\,\text{sen}\theta, z = z$. De $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ obtemos $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Temos

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2},$$

em coordenadas cilíndricas:

$$r \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}.$$

Vejamos em que pontos o cone intersecta a esfera:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ & \Rightarrow x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) = 2 \\ & \Rightarrow 2r^2 = 2 \\ & \Rightarrow r = 1, \text{ pois } r \geq 0. \end{aligned}$$

Note que a projeção do sólido sobre o plano xy é então o interior do círculo de raio 1 :

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_E dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} r\, dzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(\sqrt{2-r^2} - r)\, drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}dr - \int_0^1 r^2dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta\left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}dr - \int_0^1 r^2dr\right) \quad (\star) \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 2\pi\left(-\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

$(\star)$ Substituição: $u = 2 - r^2$

Exercícios Extras

Exercício 7. Calcule
$$\int\int\int_E \frac{z}{x^2+z^2}dV$$
sendo $E = \{(x,y,z); 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4,\ 0 \leq x \leq z\}$.

Solução: Temos
$$\int\int\int_E \frac{z}{x^2+z^2}dV = \int_1^4\int_y^4\int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}dxdzdy.$$

$\Bigg($Para calcular a integral de dentro, lembre-se das seguintes integrais
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C \text{ e } \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$
A segunda fórmula de integração acima pode ser obtida a partir da primeira, fazendo $u = \frac{x}{a}$ daí $du = \frac{1}{a}dx$, i.e $dx = adu$ então
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1}{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.\Bigg)$$

Então,
$$\begin{aligned}
\int_1^4\int_y^4\int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}dxdzdy &= \int_1^4\int_y^4 \left[\frac{z}{z}\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\right]_0^z dzdy \\
&= \int_1^4\int_y^4 (\arctan(1) - \arctan(0))\, dzdy \\
&= \int_1^4\int_y^4 \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) dzdy \\
&= \int_1^4 \frac{\pi}{4}[z]_y^4\, dy \\
&= \int_1^4 \frac{\pi}{4}(4-y)\, dy \\
&= \frac{\pi}{4}\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_1^4 \\
&= \frac{\pi}{4}\left(16 - \frac{16}{2} - 4 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}$$