Neemias Martins
neemias.org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Integrais triplas em coordenadas esféricas

Exercício 1. Calcule
$$\int\int\int_B (x^2+y^2+z^2)^2 dV,$$
sendo B a bola com centro na origem e raio 5.

Solução: Usaremos coordenadas esféricas:
$$\begin{aligned} x &= \rho \,\text{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho \,\text{sen}\phi \,\text{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\phi. \end{aligned}$$

Então,
$$\begin{aligned} \int\int\int_B (x^2+y^2+z^2)^2 dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5} \rho^4\cdot\rho^2 \,\text{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\frac{\rho^7}{7}\,\text{sen}\phi]_0^5 d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{5^7}{7}\,\text{sen}\phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [-\frac{5^7}{7}\cos\phi]_0^{\pi} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{5^7}{7}\cdot 2 d\theta \\ &= \frac{5^7}{7}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{312500\pi}{7}. \end{aligned}$$

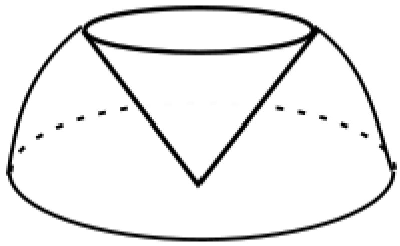
Exercício 2. Calcule o volume do sólido:

(a) dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano-xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano-xy e acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução:

(a)



Usaremos coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= \rho\, \mathrm{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho\, \mathrm{sen}\phi\, \mathrm{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\phi. \end{aligned}$$

Em coordenadas esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é equivalente a $\rho^2 = 4$ i.e $\rho = 2$. E o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é equivalente a $\phi = \frac{\pi}{4}$, pois

$$\rho \cos\phi = \sqrt{p^2\, \mathrm{sen}^2\phi(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)} = \rho\, \mathrm{sen}\phi \Rightarrow \cos\phi = \mathrm{sen}\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Então, $E = \{(\rho, \theta, \phi) | 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} V = \int\int\int_E dV &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2\, \mathrm{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2\, d\rho \\ &= [-\cos\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\theta]_0^{2\pi} [\frac{\rho^3}{3}]_0^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}. \end{aligned}$$

(b) Neste caso temos

$$\begin{aligned} V = \int\int\int_E dV &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2\, \mathrm{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{sen}\phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2\, d\rho \\ &= [-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{4}} [\theta]_0^{2\pi} [\frac{\rho^3}{3}]_0^2 \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 3. Use a transformação $x = 2u + v$, $y = u + 2v$ para calcular

$$\int\int_R (x - 3y) dA$$

sendo R a região triangular de vértices $(0,0), (2,1), (1,2)$.
Extra: Mostre que a transformação é injetiva.

SOLUÇÃO: O jacobiano da transformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Ainda,

$$x - 3y = (2u + v) - 3u + 2v) = -u - 5v.$$

Encontraremos as curvas que delimitam a região R:

- $y = ax + b$ passando por $(0,0)$ e $(2,1)$. Como $(0,0)$ está na reta,

  $$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0.$$

  Como $(2,1)$ está na reta,

  $$1 = 2a + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

  Logo $y = \frac{1}{2}x$.
- $y = ax + b$ passando por $(0,0)$ e $(1,2)$. Como $(0,0)$ está na reta, temos $b = 0$. Como $(1,2)$ está na reta,

  $$2 = a + 0.$$

  Logo y=2x.
- $y = ax + b$ passando por $(1,2)$ e $(2,1)$. Como $(1,2)$ pertence à reta,

  $$2 = a + b \Rightarrow b = 2 - a.$$

  Como $(2,1)$ pertence à reta,

  $$1 = 2a + b \Rightarrow b = 1 - 2a.$$

  Daí

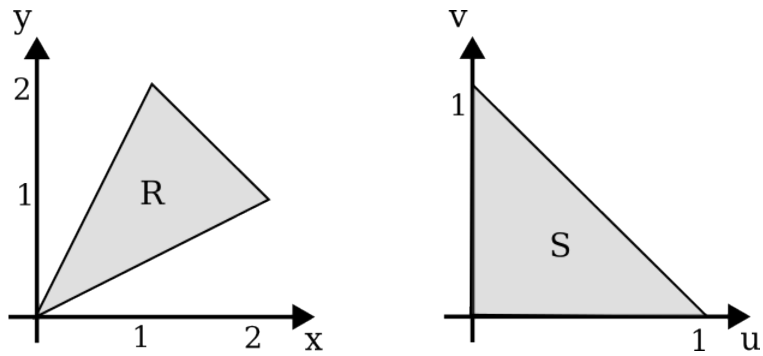
  $$2 - a = 1 - 2a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3.$$

  Logo $y = -x + 3$.

Agora procuremos as curvas que delimitam a região S:

- $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow u + 2v = \frac{1}{2}(2u + v) \Rightarrow v = 0$.
- $y = 2x \Rightarrow u + 2v = 4u + 2v \Rightarrow u = 0$.
- $y = -x + 3 \Rightarrow u + 2v = -2u - v + 3 \Rightarrow v = -u + 1$.

Então a região de integração S no plano-uv é o triângulo tal que $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq -u + 1$.



Portanto, pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned}
\int\int_R (x-3y)dA &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u-5v)|3|\,dvdu \\
&= -3\int_0^1 \int_0^{1-u} (u+5v)\,dvdu \\
&= -3\int_0^1 [uv + 5\frac{v^2}{2}]_0^{1-u}\,du \\
&= -3\int_0^1 (u-u^2+\frac{5}{2}(1-u)^2)\,du \\
&= -3\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{5}{2}\left(-\frac{(1-u)^3}{3}\right)\right]_0^1 \\
&= -3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) = -3.
\end{aligned}$$

Extra: A transformação é injetiva. De fato, temos $T(u,v) = (x,y)$ sendo $x = 2u+v$ e $y = u+2v$. Suponha que $T(u_1,v_1) = T(u_2,v_2)$, então

$$\begin{cases} 2u_1 + v_1 = 2u_2 + v_2 \\ u_1 + 2v_1 = u_2 + 2v_2 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (-2) e somando com a primeira obtemos

$$\begin{aligned}
&v_1 - 4v_1 = v_2 - 4v_2 \\
&\Rightarrow -3v_1 = -3v_2 \\
&\Rightarrow v_1 = v_2.
\end{aligned}$$

Substituindo $v_1 = v_2$ em qualquer uma das duas equações, obtem-se $u_1 = u_2$. Como $(u_1,v_1) = (u_2,v_2)$, a transformação é injetiva.

EXERCÍCIO 4. Calcule o volume do sólido limitado pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

SOLUÇÃO: Usaremos a transformação

$$x = au,\ y = bv,\ z = cw.$$

Logo

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \Rightarrow\ &\frac{a^2u^2}{a^2} + \frac{b^2v^2}{b^2} + \frac{c^2w^2}{c^2} = 1 \\ \Rightarrow\ &u^2 + v^2 + w^2 = 1. \end{aligned}$$

O jacobiano da transformação é dado por

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc.$$

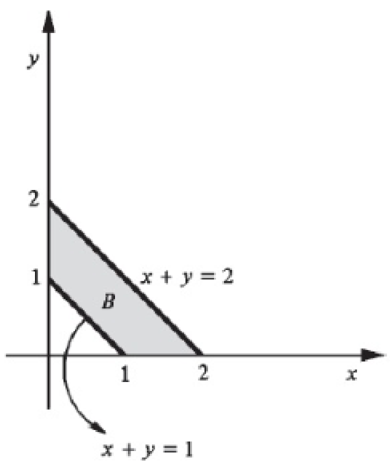
Portanto,

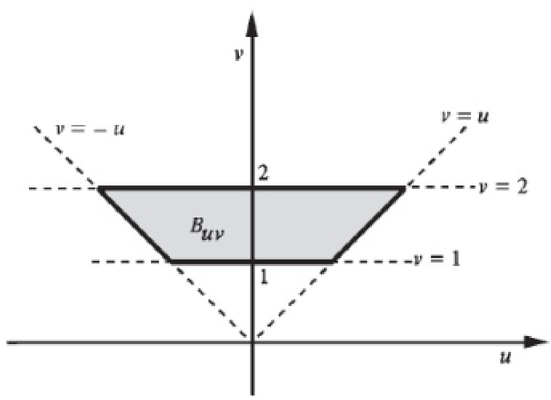
$$\begin{aligned} V = \iiint_E dV &= \iint_B |abc| dV(u,v,w) \\ &= abc \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta d\rho \\ &= \cdots \quad \textit{calcule} \\ &= abc \cdot \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Exercício 5. Calcule
$$\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}dxdy$$
sendo B o trapézio dado por
$$1 \leq x+y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Façamos a mudança de variáveis
$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y. \end{cases}$$
Somando as duas equações, obtemos
$$x = \frac{1}{2}(u+v).$$
Multiplicando a segunda equação por (-1)
$$\begin{cases} u = x-y \\ -v = -x-y \end{cases}$$
e somando as duas obtemos
$$y = \frac{1}{2}(v-u).$$
Calculando o jacobiano,
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$
Vejamos a ação da transformação no trapézio B :

- $y = 1-x$:
$$\frac{1}{2}(v-u) = 1 - \frac{1}{2}(u+v) \Rightarrow v = 1.$$
- $y = 2-x$:
$$\frac{1}{2}(v-u) = 2 - \frac{1}{2}(u+v) \Rightarrow v = 2.$$
- $y = 0$:
$$\frac{1}{2}(v-u) = 0 \Rightarrow v = u$$
- $x = 0$:
$$\frac{1}{2}(u+v) = 0 \Rightarrow v = -u.$$





Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\mathrm{sen}(x+y)}dxdy &= \iint_{B_{uv}} \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}(v)} \cdot \frac{1}{2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{-v}^{v} \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}(v)}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \left.\frac{\mathrm{sen}u}{\mathrm{sen}v}\right|_{-v}^{v} dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 2dv = 1.
\end{aligned}$$

Exercícios Extras

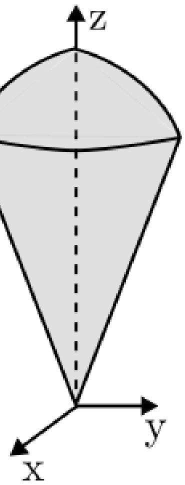
EXERCÍCIO 6. Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} \rho^2 \,\text{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi.$$

SOLUÇÃO: A região de integração está descrita em coordenadas esféricas por

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \,|\, 0 \leq \rho \leq 3,\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}\right\}.$$

E representa o sólido no primeiro octante limitada superiormente pela esfera de raio 3, i.e $\rho = 3$, e inferiormente pelo cone $\phi = \frac{\pi}{6}$. Esboço:



$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} \rho^2 \,\text{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{sen}\phi d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{3} \rho^2 d\rho \\
&= [-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{6}} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{\rho^3}{3}]_0^3 \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 9 \\
&= \frac{9\pi}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{9\pi}{4}(2-\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Exercício 7. Calcule $\int\int\int_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$ em que E é delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=9$ no primeiro octante.

Solução: Usaremos coordenadas esféricas. Temos

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \,|\, 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 3\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int\int\int_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 e^{\rho} \rho^2 \,\mathrm{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\phi d\phi \int_0^3 e^{\rho}\rho^2 d\rho \\
&= \frac{\pi}{2} \big[-\cos\phi \big]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 e^{\rho}\rho^2 d\rho \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^3 e^{\rho}\rho^2 d\rho
\end{aligned}$$

Via integração por partes, tomando $u = \rho^2$ e $dv = e^{\rho} d\rho$, temos

$$\int e^{\rho}\rho^2 d\rho = uv - \int v du = \rho e^{\rho} - 2\int e^{\rho}\rho d\rho$$

Novamente por partes, $\tilde{u} = \rho$ e $d\tilde{v} = e^{\rho} d\rho$, obtemos

$$\int e^{\rho}\rho d\rho = \tilde{u}\tilde{v} - \int \tilde{v} d\tilde{u} = \rho e^{\rho} - \int e^{\rho} d\rho = \rho e^{\rho} - e^{\rho} + c.$$

Então,

$$\int e^{\rho}\rho^2 d\rho = \rho e^{\rho} - 2(\rho e^{\rho} - e^{\rho}) + c = \rho e^{\rho} - 2\rho e^{\rho} + 2e^{\rho} + c = e^{\rho}(\rho^2 - 2\rho + 2) + c.$$

Voltando à nossa integral inicial, obtemos

$$\begin{aligned}
\int\int\int_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV &= \frac{\pi}{2} \int_0^3 e^{\rho}\rho^2 d\rho \\
&= \frac{\pi}{2} e^{\rho}(\rho^2 - 2\rho + 2)\Big|_0^3 \\
&= \frac{\pi}{2}(e^3(9-6+2)-2) = \frac{\pi}{2}(5e^3 - 2).
\end{aligned}$$