

Aula de Exercícios

♠ Cálculo II - MA211

Neemias Martins

neemias.org/ped 🌐

neemias@ime.unicamp.br ✉

ROTACIONAL E DIVERGENTE

Exercício 1

Mostre que não existe um campo vetorial G em \mathbb{R}^3 tal que
$$\text{rot}(G) = (x \sin y, \cos y, z - xy).$$

SOLUÇÃO:

Se existe tal campo G , ele deve satisfazer à igualdade: $\text{div}(\text{rot}(G)) = 0$. Mas,

$$\text{div}(\text{rot}(G)) = \sin y - \sin y + 1 = 1 \neq 0.$$

Portanto não existe campo G com o rotacional dado.

Exercício 2

Considere o campo

$$F(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2).$$

Verifique que o campo vetorial F é conservativo e calcule $f(x, y, z)$ tal que $\nabla f = F$.

SOLUÇÃO:

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + 2yz & y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\vec{i} - (0 - 0)\vec{j} + (2x - 2x)\vec{k} = (0, 0, 0).$$

Como $\text{rot}(F) = \vec{0}$ e as derivadas parciais de 2ª ordem das funções componentes são contínuas, então F é conservativo. Logo, existe uma função f tal que $\nabla f = F$.

A fim de determinarmos f , devemos ter

$$f_x(x, y, z) = 2xy$$

$$f_y(x, y, z) = x^2 + 2yz$$

$$f_z(x, y, z) = y^2$$

Da primeira igualdade, temos

$$f_x(x, y, z) = 2xy$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = x^2y + g(y, z)$$

$$\Rightarrow f_y(x, y, z) = x^2 + g_y(y, z).$$

Uma vez que $f_y(x, y, z) = x^2 + 2yz$ e $f_y(x, y, z) = x^2 + g_y(y, z)$ obtemos

$$x^2 + 2yz = x^2 + g_y(y, z)$$

$$\Rightarrow g_y(y, z) = 2yz$$

$$\Rightarrow g(y, z) = y^2z + h(z)$$

Como $f(x, y, z) = x^2y + g(y, z)$ e $g(y, z) = y^2z + h(z)$, então

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + h(z)$$

$$\Rightarrow f_z(x, y, z) = y^2 + h'(z).$$

Uma vez que $f_z(x, y, z) = y^2$ e $f_z(x, y, z) = y^2 + h'(z)$, temos

$$y^2 = y^2 + h'(z)$$

$$\Rightarrow h'(z) = 0$$

$$\Rightarrow h(z) = K.$$

Portanto,

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + K.$$

Exercício 3

Calcule a área da superfície dada por

$$\begin{aligned}x &= uv \\y &= u + v \\z &= u - v\end{aligned}$$

com $u^2 + v^2 \leq 1$.

SOLUÇÃO: Seja S a superfície parametrizada por

$$r(u, v) = (uv, u + v, u - v); \quad u^2 + v^2 \leq 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}r_u &= (v, 1, 1) \\r_v &= (u, 1, -1)\end{aligned}$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v & 1 & 1 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 1)\vec{i} - (-v - u)\vec{j} + (v - u)\vec{k} = (-2, u + v, v - u)$$

$$\begin{aligned}|r_u \times r_v| &= \sqrt{(-2)^2 + (u + v)^2 + (v - u)^2} = \sqrt{4 + u^2 + 2uv + v^2 + u^2 - 2uv + v^2} \\ &= \sqrt{4 + 2(u^2 + v^2)}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}A(S) &= \int \int_S 1 \cdot dS = \int \int_D |r_u \times r_v| \, dA \\ &= \int \int_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{4 + 2(u^2 + v^2)} \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4 + 2\alpha^2} \cdot \alpha \, d\alpha d\theta \quad (\text{coordenadas polares}) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(4 + 2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{6} \right]_0^1 d\theta \quad (*) \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{6} \left(6^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\pi}{3} \left(6^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\pi}{3} (6\sqrt{6} - 8).\end{aligned}$$

(*) Substituição: $w = 4 + 2\alpha^2 \Rightarrow \int \sqrt{4 + 2\alpha^2} \cdot \alpha \, d\alpha = \frac{1}{4} \int \sqrt{w} \, dw = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{6} w^{\frac{3}{2}} + k.$

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Exercício 4

Calcule a integral de superfície

$$\iint_S (x^2z + y^2z) \, dS,$$

sendo S o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$.

SOLUÇÃO:

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(r(u, v)) \cdot |r_u \times r_v| \, dA.$$

Para parametrizar a superfície S , usaremos coordenadas esféricas:

$$x = 2 \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = 2 \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = 2 \cos \varphi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

ou seja,

$$r(\varphi, \theta) = (2 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, 2 \cos \varphi)$$

$$r_\varphi = (2 \cos \varphi \cos \theta, 2 \cos \varphi \sin \theta, -2 \sin \varphi)$$

$$r_\theta = (-2 \sin \varphi \sin \theta, 2 \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$r_\varphi \times r_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 \cos \varphi \cos \theta & 2 \cos \varphi \sin \theta & -2 \sin \varphi \\ -2 \sin \varphi \sin \theta & 2 \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (4 \sin^2 \varphi \cos \theta, 4 \sin^2 \varphi \sin \theta, 4 \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$|r_\varphi \times r_\theta| = 4 \sin \varphi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) \, dS &= \iint_D f(r(u, v)) \cdot |r_u \times r_v| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \cdot 2 \cos \varphi + 4 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \cdot 2 \cos \varphi) \cdot 4 \sin \varphi \, d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 \varphi \cdot 2 \cos \varphi \cdot 4 \sin \varphi \, d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 32 \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi d\theta \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \cdot 32 \left[\frac{\sin^4 \varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Exercício 5

Calcule a integral de superfície $\int \int_S F \cdot d\vec{S}$ para o campo vetorial

$$F(x, y, z) = (xy, yz, zx),$$

sendo S a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1,$$

e com orientação ascendente.

SOLUÇÃO:

Parametrização de S : $r(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2)$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$. Então,

$$r_u = (1, 0, -2u)$$

$$r_v = (0, 1, -2v)$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

$$\begin{aligned} F(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) &= (uv, v(4 - u^2 - v^2), (4 - u^2 - v^2)u) \cdot (2u, 2v, 1) \\ &= 2u^2v + 2v^2(4 - u^2 - v^2) + u(4 - u^2 - v^2) \\ &= 2u^2v + 8v^2 - 2u^2v^2 - 2v^4 + 4u - u^3 - uv^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \int_S F \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^1 F(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) \, dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2u^2v + 8v^2 - 2u^2v^2 - 2v^4 + 4u - u^3 - uv^2) \, dudv \\ &= \int_0^1 \left[(2v - 2v^2) \frac{u^3}{3} + (8v^2 - 2v^4)u + (4 - v^2) \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right]_0^1 dv \\ &= \int_0^1 \left[(2v - 2v^2) \frac{1}{3} + 8v^2 - 2v^4 + (4 - v^2) \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] dv \\ &= \left[\frac{v^2}{3} - \frac{2}{9}v^3 + \frac{8}{3}v^3 - \frac{2}{5}v^5 + 2v - \frac{v^3}{6} - \frac{1}{4}v \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{8}{3} - \frac{2}{5} + 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{713}{180}. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO EXTRA

Exercício 6

Calcule $\int \int_S F \cdot d\vec{S}$ sendo $F(x, y, z) = (0, y, -z)$ e S dada pelo parabolóide
 $y = x^2 + z^2, 0 \leq y \leq 1$
 e pelo disco
 $x^2 + z^2 \leq 1, y = 1.$

SOLUÇÃO: Seja S_1 o parabolóide e S_2 o disco. Temos $S = S_1 \cup S_2$. Como S é uma superfície fechada, usaremos a orientação positiva (para fora de S).

Temos,

$$\int \int_S F \cdot d\vec{S} = \int \int_{S_1} F \cdot d\vec{S} + \int \int_{S_2} F \cdot d\vec{S}.$$

Calcularemos separadamente cada uma das integrais acima.

- Em S_1 :

$$r(u, v) = (u, u^2 + v^2, v), u^2 + v^2 \leq 1$$

$$r_u \times r_v = (2u, -1, 2v)$$

$$F(r(u, v)) = (0, u^2 + v^2, -v).$$

$$\begin{aligned} \int \int_{S_1} F \cdot d\vec{S} &= \int \int_{u^2+v^2 \leq 1} F(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) dA \\ &= \int \int_{u^2+v^2 \leq 1} [-(u^2 + v^2) - 2v^2] dudv \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^2 + 2r^2 \sin^2 \theta] r dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (1 + 2 \sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (1 + 1 - \cos(2\theta)) dr d\theta \\ &= - \left[2\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 \\ &= -4\pi \cdot \frac{1}{4} \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

- Em S_2 , observe que o vetor normal unitário da superfície S_2 é o vetor $n = (0, 1, 0)$. (Pois S_2 é um disco de raio 1 no plano- xz , o vetor normal aponta na direção y).

Parametrização: $x = u, y = 1, v = z, u^2 + v^2 \leq 1$, ou seja

$$r(u, v) = (u, 1, v), u^2 + v^2 \leq 1.$$

Como $F(x, y) = (0, y, -z)$, temos

$$F(r(u, v)) = (0, 1, -v)$$

$$F(r(u, v)) \cdot n = (0, 1, -v) \cdot (0, 1, 0) = 1.$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} F \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_2} F \cdot n \, dS \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 1 \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Portanto, $\iint_S F \cdot d\vec{S} = -\pi + \pi = 0$.